



Donovan Reese/Getty Images, Inc.

Bridge construction on an expressway interchange.

CHAPTER 3

Flexural Analysis of Beams

ABSTRACT

In this section, it is assumed that a small transverse load is placed on a concrete beam with tensile reinforcing and that the load is gradually increased in magnitude until the beam fails. As this takes place, the beam will go through three distinct stages before collapse occurs. These are: (1) the uncracked concrete stage, (2) the concrete cracked–elastic stresses stage, and (3) the ultimate-strength stage. A relatively long beam is considered for this discussion so that shear will not have a large effect on its behavior.

Ali R. Emami

Reinforced Concrete: Mechanics and Design

Introduction

Some Observations about Flexural Behavior:

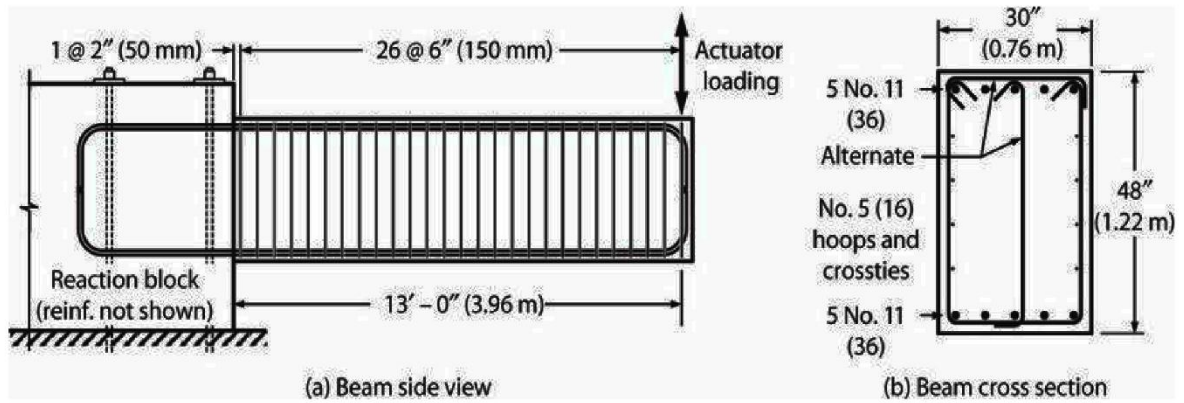


FIGURE 6.1 (a) Laboratory test beam. (b) Beam cross section. (After Panagiotou et al., 2013.)

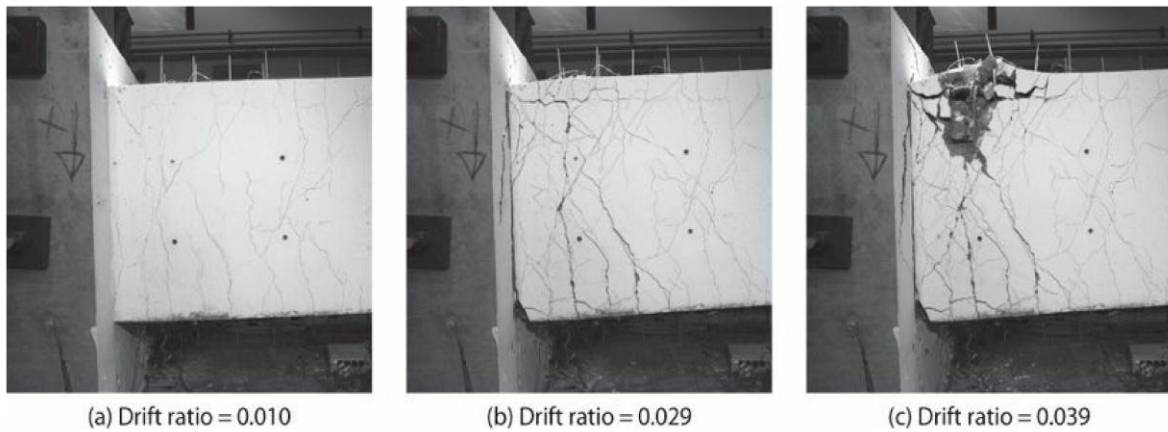
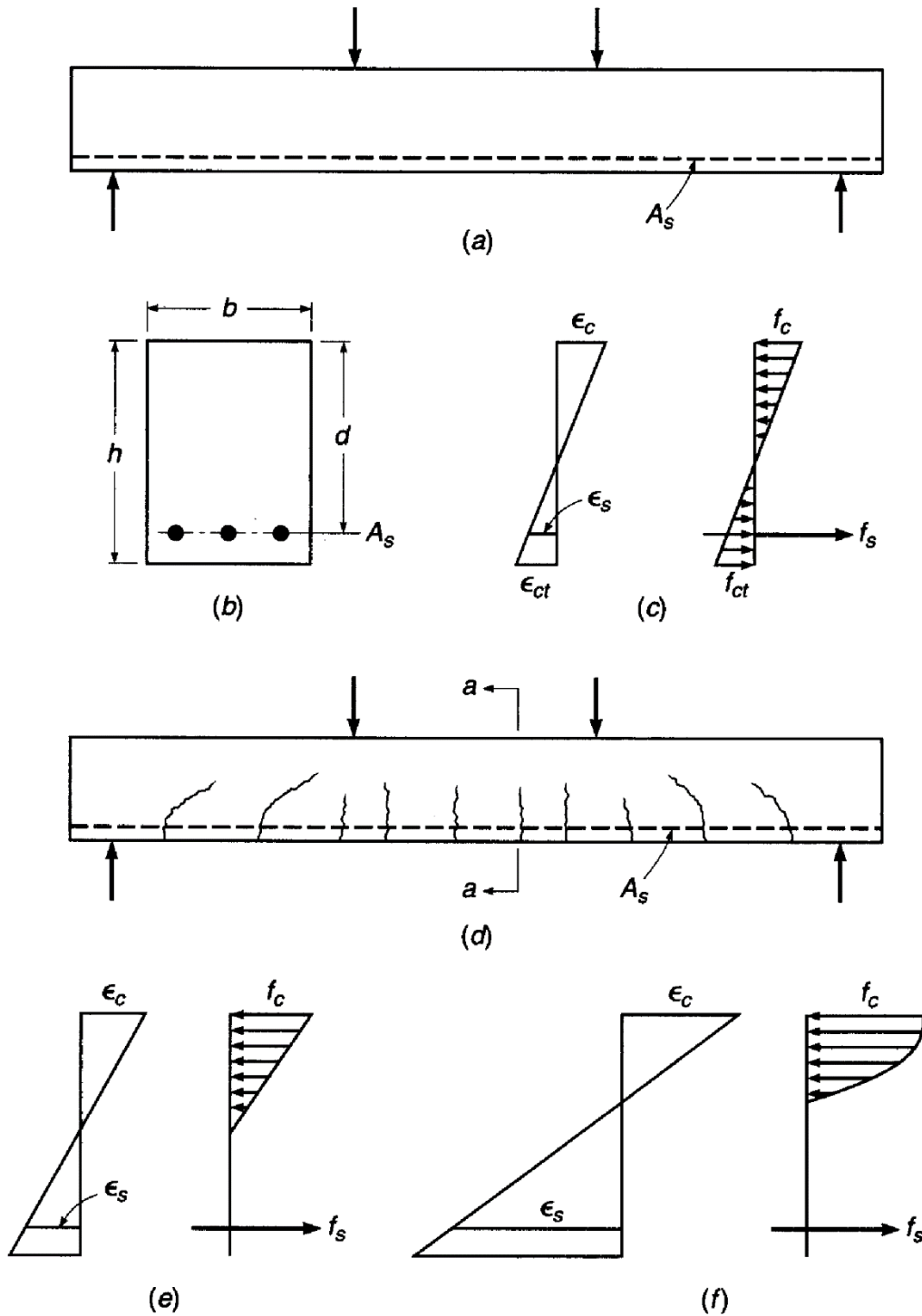


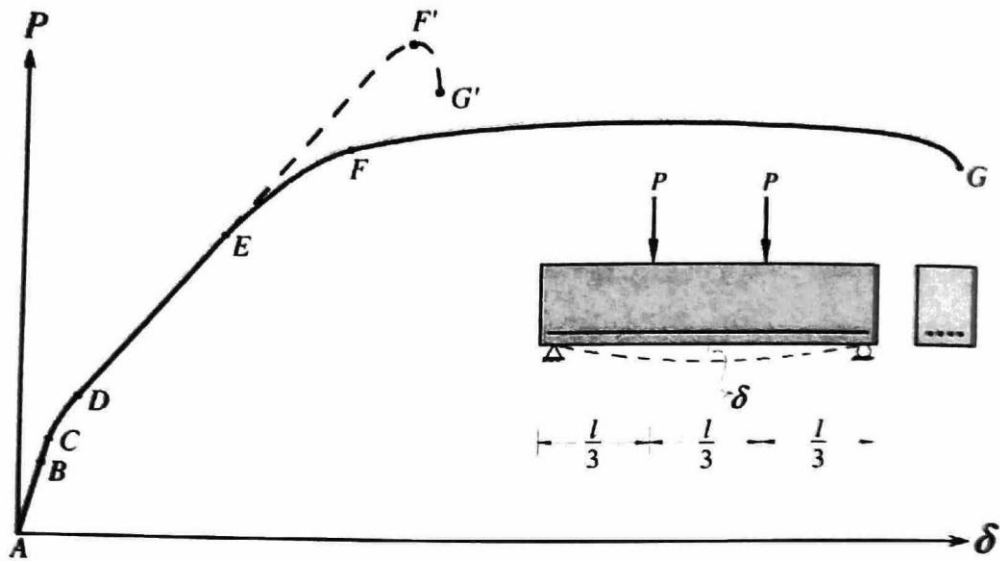
FIGURE 6.3 Development of damage in test beam. (After Panagiotou et al., 2013.)

Reinforced concrete beam behaviour:

- (1) Uncracked Concrete Stage
- (2) The concrete cracked-elastic stresses stage
- (3) The ultimate-strength stage



The relation between load and displacement



Flexural Deformations

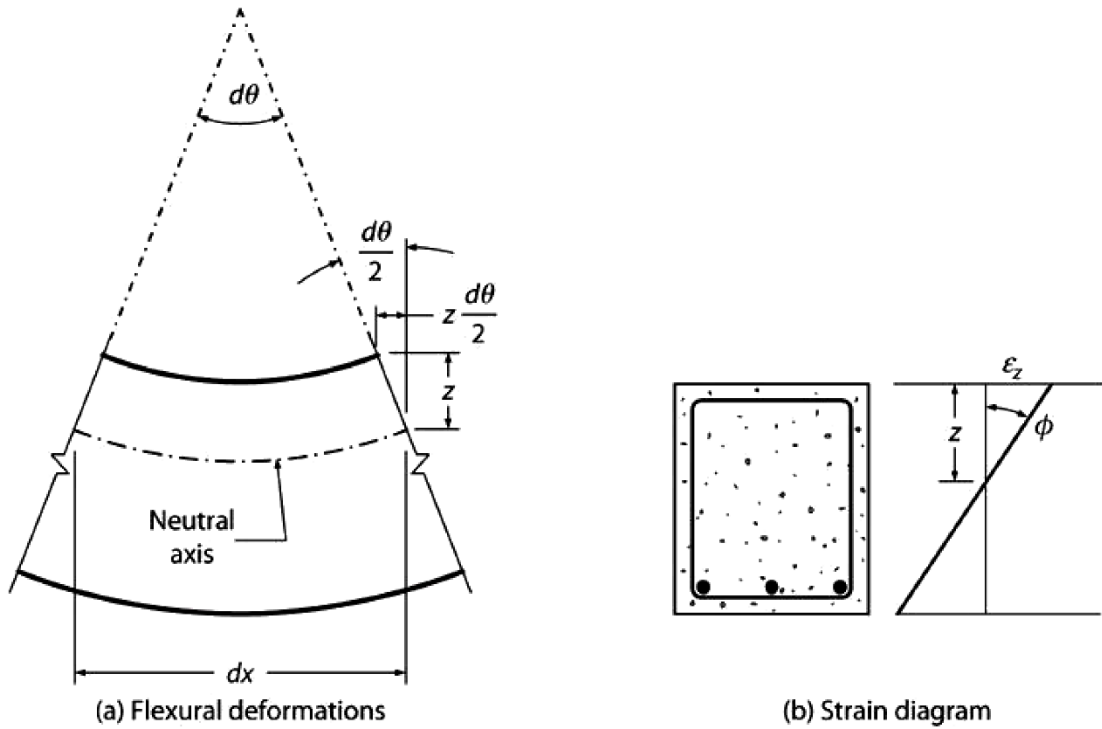


FIGURE 6.6 Flexural deformations and normal strains.

$$\phi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\epsilon_z}{z} = \frac{M}{EI}$$

The relation between moment and curvature

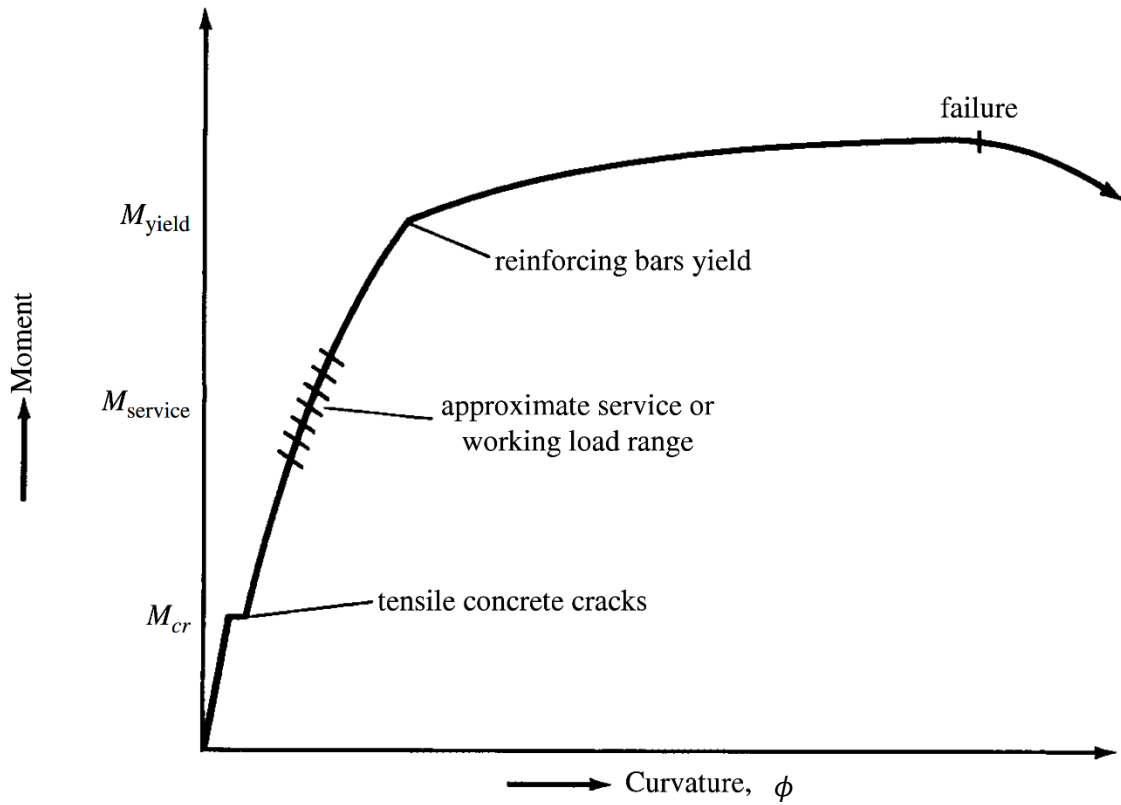
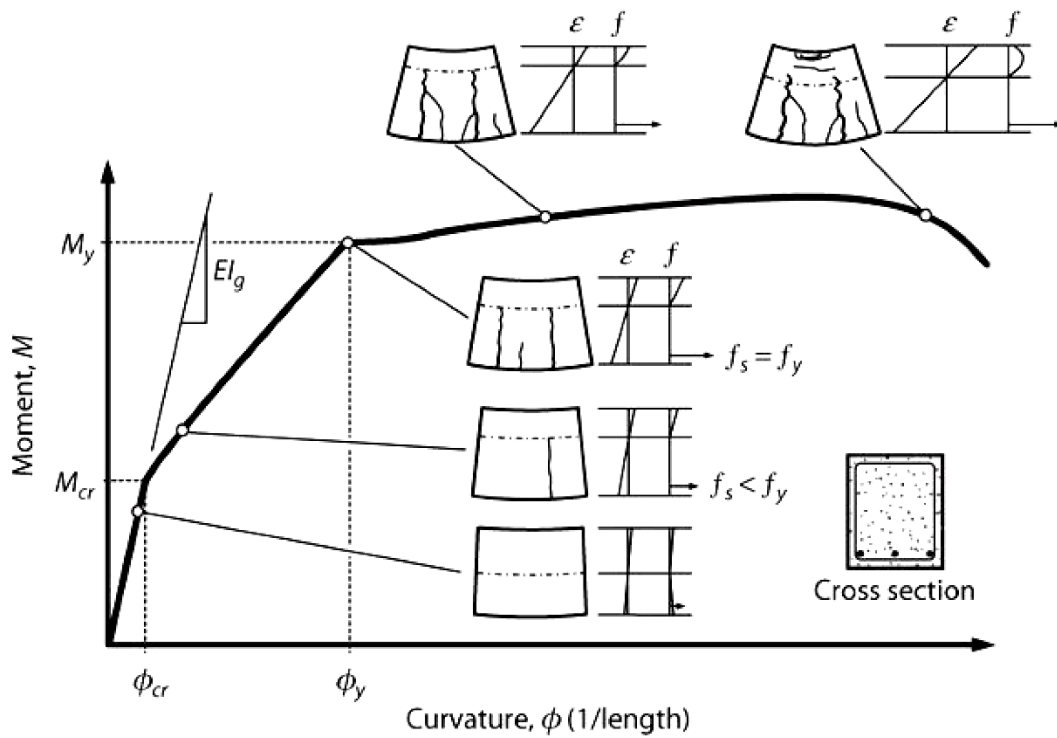


FIGURE 2.4 Moment–curvature diagram for reinforced concrete beam with tensile reinforcing only.

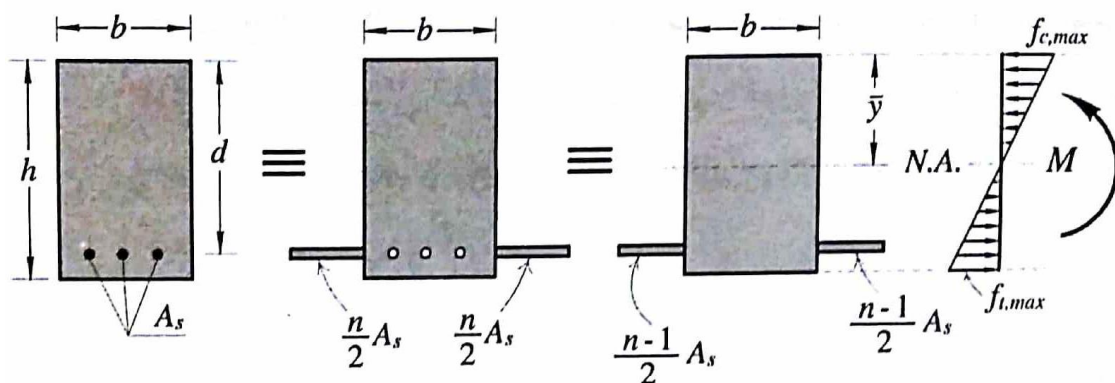


(1) Uncracked Concrete Stage

At small loads when the tensile stresses are less than the modulus of rupture (the bending tensile stress at which the concrete begins to crack), the entire cross section of the beam resists bending, with compression on one side and tension on the other.

در این روش شرایط مقطع بتن آرمه طوری فراهم می‌گردد که تحت بار حداکثر، ترک خوردگی در مقطع ایجاد نشود؛ یعنی تنش در دورترین تار کششی مقطع از ضریب گسیختگی بتن کمتر باشد ($f_{t,max} \leq f_r$).

برای بررسی مقطع بتن آرمه در این حالت، می‌توان از روابط متداول مقاومت مصالح استفاده کرد. بدین منظور از آنجا که مقطع بتن آرمه یک مقطع دو جنسی است، باید با تبدیل فولاد مقطع به بتن معادل، مقطع را به یک "مقطع تبدیل شده" یک جنسی تبدیل نمود. تبدیل مقطع و تنش‌های ایجاد شده در قسمت‌های مختلف، در شکل ۲-۴ نمایش داده شده است.



کل ۲-۴ تبدیل مقطع بتن آرمه با رفتار الاستیک به یک مقطع تبدیل شده و نمایش تنش‌های فشاری و کششی در بتن

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{b \times h \times (h/2) + (n-1) A_s \times d}{b \times h + (n-1) A_s}$$

$$I_{tr} = \sum (I_0 + AD^2) = \frac{1}{12} bh^3 + b h \left(\frac{h}{2} - \bar{y} \right)^2 + (n-1) A_s (d - \bar{y})^2$$

(1) Uncracked Concrete Stage...

متغیرهای به کار رفته در شکل ۲-۴ عبارتند از: b = عرض مقطع، h = عمق مقطع، d = عمق مؤثر مقطع (فاصله مرکز سطح فولادها از دورترین تار فشاری مقطع)، A_s = سطح مقطع فولادهای کششی، n = نسبت مدولی ($n = E_s / E_c$)، \bar{y} = فاصله دورترین تار فشاری مقطع از تار خنثی، $f_{c,max}$ = تنش در دورترین تار فشاری مقطع، $f_{t,max}$ = تنش در دورترین تار کششی مقطع، و M = لنگر وارده به مقطع.

برای تعیین تنش‌ها در بتن می‌توان از روابط کلاسیک مقاومت مصالح و به صورت روابط (۳-۴) و (۴-۴) عمل کرد. واضح است که برای تعیین تنش در فولادها (f_s) که جنس تبدیل شده می‌باشد، باید تنش در بتن معادل را n برابر بزرگ نمود (رابطه ۵-۴).

$$f_{t,max} = \frac{M (h - \bar{y})}{I_{tr}} \leq f_r \quad (3-4)$$

$$f_{c,max} = \frac{M \bar{y}}{I_{tr}} \quad (4-4)$$

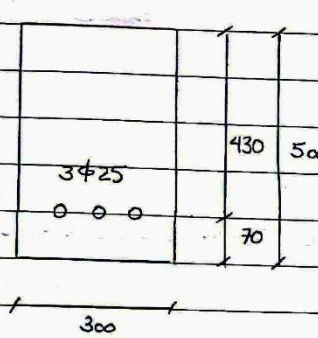
$$f_s = n \frac{M (d - \bar{y})}{I_{tr}} \quad (5-4)$$

همچنین می‌توان لنگر ترک خوردگی (M_{cr}) یک مقطع بتن‌آرمه را از رابطه (۶-۴) به دست آورد:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_{tr}}{h - \bar{y}} \quad (6-4)$$

مقطع شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت اثر لنگر خمشی مثبت قرار می‌گیرد. نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد کششی، n می‌باشد. با در نظر گرفتن $f'_c = 30 \text{ MPa}$ و همچنین $f_y = 400 \text{ MPa}$ مطلوب است محاسبه:

۱. ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته و لنگر ترک دهنده مقطع
۲. حداکثر تنش فشاری بتن و تنش کششی فولاد تحت M_{CR}
۳. ترسیم نمودار تغییرات تنش و کرنش تحت M_{CR} و محاسبه انحنای مقطع

Subject			
Year	Month	Date ()	
5		$f'_c = 30 \text{ MPa}$ $f_y = 400 \text{ MPa}$ $A_s = 3\phi 25$	$b = 300 \text{ mm}$ $d = 430 \text{ mm}$ $h = 500 \text{ mm}$
		$A_s = 1473 \text{ mm}^2$	$w_c = 2480 \text{ kg/m}^3$
		$E_s = 200 \text{ GPa}$	
		$E_c = w_c^{1.5} (0.043) \sqrt{f'_c}$	$1500 \ll w_c \ll 2500$
		$E_c \approx 4700 \sqrt{f'_c}$	
		دقیق $E_c = 2450^{1.5} (0.043) \sqrt{30} = 28.6 \times 10^3 \text{ MPa} = 28.6 \text{ GPa}$	
		تقریبی $E_c = 4700 \sqrt{30} = 25.7 \times 10^3 \text{ MPa} = 25.7 \text{ GPa}$	

۱۵. $n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{28.6} = 7 \Rightarrow n = 7$ کدام ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته

$(n-1) A_s = (7-1) 1473 = 8840 \text{ mm}^2$

۲۰ $\bar{y} = \frac{(300 \times 500) \times 250 + 8840 \times 430}{300 \times 500 + 8840} \Rightarrow \bar{y} = 260 \text{ mm} > 250 \text{ mm}$

$I_{tr} = \sum I + A d_y^2 = \frac{300 \times 500^3}{12} + 300(500)(260 - 250)^2 + 8840(430 - 260)^2$

$I_{tr} = 3.40 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 3400 \times 10^6 \text{ mm}^4$

۲۵ $I_g = \frac{b k^3}{12} = 3.13 \times 10^9 \text{ mm}^4$

$I_{tr} / I_g = 1.09$ اثر سگرتها در افتادگی ممان اینرسی ۱۰٪ است.

$f_r = 0.7 \sqrt{f'_c} = 0.70 \sqrt{30} = 3.83 \text{ MPa}$

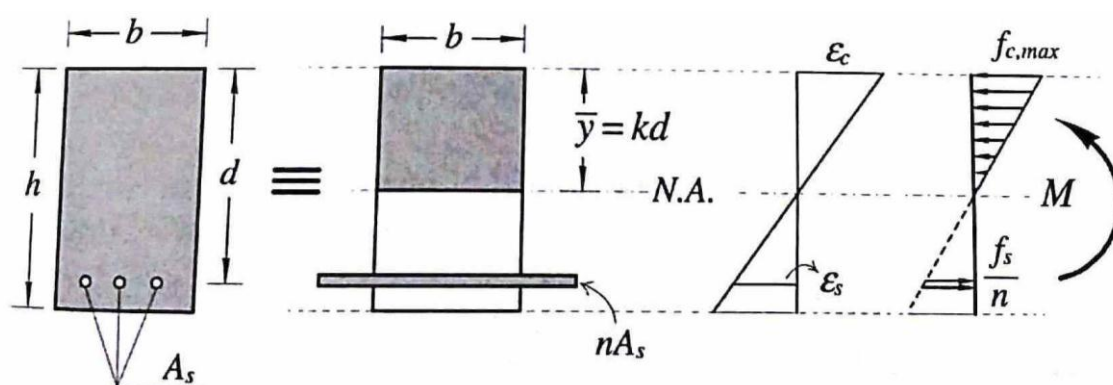
(1) Uncracked Concrete Stage...

Year	Month	Date	()
$f_{t,max} = \frac{M_{cr} (h-\bar{y})}{I_{tr}} = f_r$ <p style="text-align: right;">کدام به ترک حوضه</p>			
$f_r = \frac{M_{cr}}{I_{tr}} = f_r \frac{I_{tr}}{(h-\bar{y})}$			
$M_{cr} = 3.83 \times \frac{3.4 \times 10^9}{(500-260)} = \triangleright M_{cr} = 54.3 \times 10^6 \text{ N.mm} = 54.3 \text{ kN.m}$ <p style="text-align: right;">5</p>			
$f_s = n \frac{M_{cr} \times (d-\bar{y})}{I_{tr}}$ <p style="text-align: right;">کدام به تنش ها در دنگر ترک حوضه:</p>			
$f_s = 7 \times \frac{54.3 \times 10^6 (430-260)}{3.40 \times 10^9} \Rightarrow f_s = 19.0 \ll f_y = 400 \text{ MPa}$ <p style="text-align: right;">10</p>			
$f_c = \frac{M_{cr} \bar{y}}{I_{tr}} = \frac{54.3 \times 10^6 \times 260}{3.40 \times 10^9} \Rightarrow f_c = 4.15 \ll 0.5 f'_c = 15 \text{ MPa}$			
$\phi = \frac{\epsilon_c}{\bar{y}} ; \epsilon_c = \frac{f_c}{E_c} = \frac{4.15}{28.6 \times 10^3} = \triangleright \epsilon_c = 1.45 \times 10^{-4}$ <p style="text-align: right;">15</p>			
$\epsilon_s = \frac{f_s}{E_s} = \frac{19.0}{200 \times 10^3} = \triangleright \epsilon_s = 0.95 \times 10^{-4}$			
$\phi = \frac{\epsilon_c}{\bar{y}} = \frac{1.45 \times 10^{-4}}{260} = 5.58 \times 10^{-7} \text{ 1/mm}$ <p style="text-align: right;">20</p>			
$\phi = \frac{\epsilon_s}{d-\bar{y}} = \frac{0.95 \times 10^{-4}}{(430-260)} = 5.58 \times 10^{-7} \text{ 1/mm}$			

(2) Concrete Cracked–Elastic Stresses Stage

As the load is increased after the modulus of rupture of the concrete is exceeded, cracks begin to develop in the bottom of the beam. The moment at which these cracks begin to form—that is, when the tensile stress in the bottom of the beam equals the modulus of rupture—is referred to as the cracking moment, M_{cr} . As the load is further increased, these cracks quickly spread up to the vicinity of the neutral axis, and then the neutral axis begins to move upward.

در این روش شرایط یک مقطع بتن مسلح طوری فراهم می‌گردد که تحت بار حداکثر، بتن در قسمت فشاری مقطع تقریباً به صورت خطی کار کند ($f_{c,max} < 0.5f'_c$)؛ اگر چه در ناحیه کششی مقطع، بتن ترک خورده است. برای بررسی مقطع بتن‌آرمه در حالت رفتاری الاستو پلاستیک، باز هم می‌توان از روابط متداول مقاومت مصالح استفاده کرد. در این حالت اگرچه بتن در ناحیه بسیار محدودی در پایین تار خنثی



شکل ۴-۴ مقطع تبدیل شده و نمودارهای کرنش و تنش برای یک مقطع مستطیلی بتن‌آرمه با رفتار الاستو پلاستیک

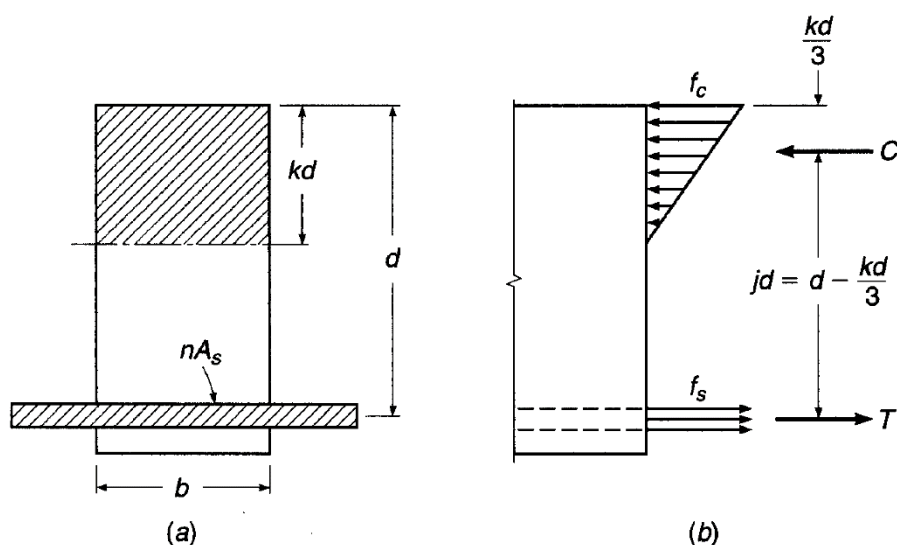
$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(b \bar{y})(\bar{y}/2) + n A_s d}{b \bar{y} + n A_s}$$

$$\bar{y}^2 + \frac{2n A_s}{b} \bar{y} - \frac{2n A_s d}{b} = 0$$

$$I_{rr} = \sum (I_o + A D^2) = \frac{1}{12} b \bar{y}^3 + (b \bar{y})(\bar{y}/2)^2 + n A_s (d - \bar{y})^2$$

$$I_{rr} = \frac{1}{3} b \bar{y}^3 + n A_s (d - \bar{y})^2 \quad (10-4)$$

(2) Concrete Cracked–Elastic Stresses Stage...



با در نظر گرفتن $\bar{y} = kd$ و فرض $\rho = A_s / bd$ ، معادلهٔ اخیر به صورت رابطهٔ (۸-۴) تبدیل می‌شود:

$$k^2 + 2n\rho k - 2n\rho = 0 \quad (۸-۴)$$

جواب قابل قبول معادلهٔ (۸-۴)، به صورت رابطهٔ (۹-۴) خواهد بود:

$$k = -n\rho + \sqrt{n^2\rho^2 + 2n\rho} \quad (۹-۴)$$

با تعیین k از رابطهٔ (۹-۴)، موقعیت تار خنثی به صورت $\bar{y} = kd$ محاسبه می‌شود. برای تعیین ممان اینرسی از رابطهٔ (۱۰-۴) استفاده می‌شود؛

برای تعیین تنش‌ها در بتن می‌توان از روابط کلاسیک مقاومت مصالح و به صورت روابط (۳-۴) و (۴-۴) عمل کرد.

$$f_{c,\max} = \frac{M \bar{y}}{I_{tr}}$$

$$f_s = n \frac{M (d - \bar{y})}{I_{tr}}$$

مقطع شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت اثر لنگر خمشی مثبت قرار می‌گیرد. نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد کششی، n می‌باشد. با در نظر گرفتن $f'_c = 30 \text{ MPa}$ و هم‌چنین $f_y = 400 \text{ MPa}$ با استفاده از روش مقاومت مصالح مطلوب است محاسبه:

۱. ممان اینرسی مقطع ترک خورده

۲. حداکثر ظرفیت خمشی، M_{max} در ناحیه الاستوپلاستیک

۳. حداکثر تنش فشاری بتن و تنش کششی فولاد تحت M_{max}

۴. ترسیم نمودار تغییرات تنش و کرنش تحت M_{max}

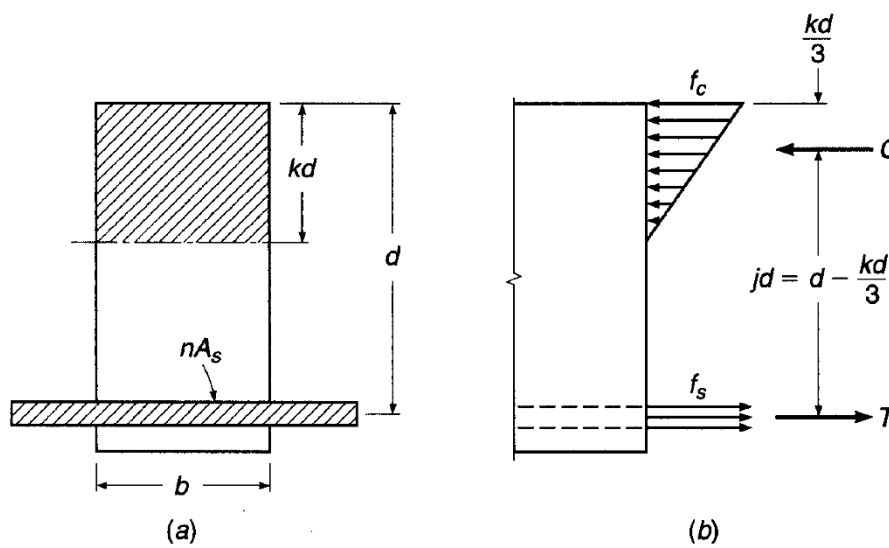
۵. انحناء مقطع

Subject			
Year	Month	Date	()
			$f'_c = 30 \text{ MPa}$
			$b = 300 \text{ mm}$
			$f_y = 400 \text{ MPa}$
			$d = 430 \text{ mm}$
			$A_s = 3\phi 25$
			$h = 500 \text{ mm}$
		430	500 mm
5		3φ25	
		○ ○ ○	
		70	
			$A_s = 1473 \text{ mm}^2$
			$w_c = 2480 \text{ kg/m}^3$
			$E_s = 200 \text{ GPa}$
		300	
			$E_c = w_c^{1.5} (0.043) \sqrt{f'_c}$
			$15000 \leq w_c \leq 25000$

2) Concrete Cracked-Elastic Stresses Stage...

Subject
Year Month Date ()
$\bar{y} = \frac{(b\bar{y})(\bar{y}/2) + n A_s d}{b\bar{y} + n A_s}$
طراحی در محدوده الاستویا سست:
$\frac{b\bar{y}^2}{2} + n A_s \bar{y} - n A_s d = 0$
$n A_s = 7 \times 1473 = 10311 \text{ mm}^2$
$150 \bar{y}^2 + 7 \times 1473 \bar{y} - 7 \times 1473 \times 430 = 0$
$150 \bar{y}^2 + 10300 \bar{y} - 4.43 \times 10^6 = 0 \Rightarrow \bar{y} = 140.9 \text{ mm}$
$\Rightarrow \bar{y} = 141 \text{ mm} \left\} < \frac{h}{2} = 250 \text{ mm} \right.$
$I_{cr} = \frac{300 \times 141^3}{3} + 10311 (430 - 141)^2$
$I_{cr} = 1.14 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1140 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$\frac{I_{cr}}{I_g} = \frac{1.140 \times 10^9}{3.13 \times 10^9} \Rightarrow \frac{I_{cr}}{I_g} = 0.365$
$f_{c, \max} = \frac{M \bar{y}}{I_{cr}} = 0.5 F_c$
$\Rightarrow M_1 = 0.5 F_c \frac{I_{cr}}{\bar{y}} = 0.5 \times 30 \times \frac{1140 \times 10^6}{141}$
$M_1 = 121 \times 10^6 \text{ N.mm} = 121 \text{ kN.m}$
$f_s = \frac{n M (d - \bar{y})}{I_{cr}} \Rightarrow M = n f_s \left[\frac{(430 - 141)}{(1140 \times 10^6)} \right]^{-1}$
$M_2 = \frac{f_y}{n} \frac{I_{cr}}{(d - \bar{y})} = \frac{400}{7} \times \frac{1140 \times 10^6}{430 - 141}$
$M_2 = 225 \times 10^6 \text{ N.mm}$
$M = \min \{ M_1, M_2 \} = 121 \text{ kN.m}$
$f_s = \frac{n M_1 (d - \bar{y})}{I_{cr}} = 7 \times \frac{121 \times 10^6 (430 - 141)}{1140 \times 10^6} = 214 \text{ MPa}$

(2) Concrete Cracked–Elastic Stresses Stage...



$$jd = d - kd/3, \text{ or } j = 1 - \frac{k}{3}$$

$$C = \frac{f_c}{2} bkd \quad \text{and} \quad T = A_s f_s$$

$$M = Tjd = A_s f_s jd \quad \Rightarrow \quad f_s = \frac{M}{A_s jd}$$

$$M = Cjd = \frac{f_c}{2} bkdjd = \frac{f_c}{2} kjb d^2 \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{2M}{kjb d^2}$$

مقطع شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت اثر لنگر خمشی مثبت قرار می‌گیرد. نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد کششی، n می‌باشد. با در نظر گرفتن $f'_c = 30 \text{ MPa}$ و هم‌چنین $f_y = 400 \text{ MPa}$ با استفاده از اصول تعادل مطلوب است محاسبه:

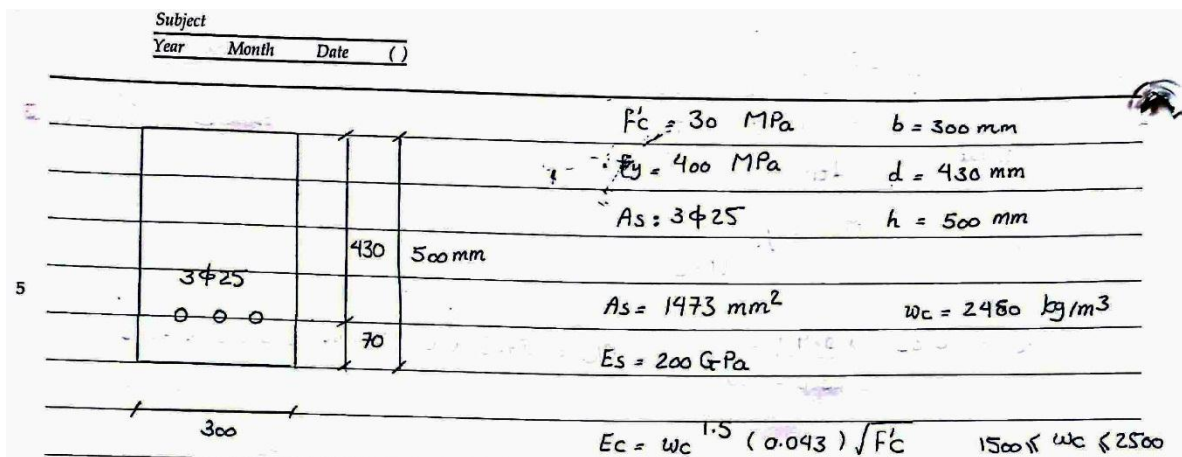
۱. ممان اینرسی مقطع ترک خورده

۲. حداکثر ظرفیت خمشی، M_{max} در ناحیه الاستوپلاستیک

۳. حداکثر تنش فشاری بتن و تنش کششی فولاد تحت M_{max}

۴. ترسیم نمودار تغییرات تنش و کرنش تحت M_{max}

۵. انحناء مقطع



2) Concrete Cracked-Elastic Stresses Stage...

Subject
Year Month Date ()

حل باستخدام از معادلات مقابل:

$$\bar{y} = 141 \text{ mm} \quad d = 430 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = kd \Rightarrow 141 = k \times 430 \Rightarrow k = 0.328$$

$$z = jd = d - \frac{\bar{y}}{3} = d \left(1 - \frac{k}{3}\right) \quad C = \frac{1}{2} b \bar{y} \quad f_{c, \max} = \frac{1}{2} b kd f_{c, \max}$$

$$\Rightarrow j = 1 - \frac{k}{3} = 1 - \frac{0.328}{3} = 0.891 \quad z = jd$$

$$z = jd = 383 \text{ mm} \quad M = Cz$$

$$f_{c, \max} = \frac{M}{\frac{1}{2} k j b d^2} = \frac{1}{2} f'_c$$

$$\Rightarrow \frac{M}{\frac{1}{2} \times 0.328 \times 0.891 \times 300 \times 430^2} = \frac{1}{2} \times 30 \Rightarrow M_1 = 122 \times 10^6 \text{ N.mm}$$

$$M_1 = 122 \text{ kN.m}$$

$$M = \overbrace{(A_s f_y)}^T \overbrace{(jd)}^z \Rightarrow M_2 = 226 \times 10^6 \text{ N.mm} = 226 \text{ kN.m}$$

$$M = \min \{ 226, 121 \} = 121 \text{ kN.m}$$

$$\epsilon_c = \frac{0.5 f_c}{E_c} = \frac{15.0}{28.6 \times 10^3} = 5.24 \times 10^{-4}$$

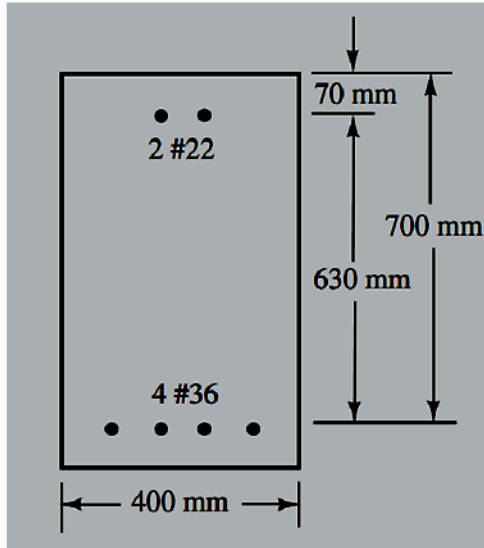
$$\phi = \frac{\epsilon_c}{\bar{y}} = \frac{5.24 \times 10^{-4}}{141} = 3.72 \times 10^{-6} \quad \text{1/mm}$$

$$f_s = \frac{M_1}{A_s j d} = \frac{122 \times 10^6}{1473 \times (0.891 \times 430)} = 216 \text{ MPa} \checkmark$$

$$\epsilon_s = \frac{f_s}{E_s} = \frac{216}{200 \times 10^3} = 10.8 \times 10^{-4}$$

$$\phi = \frac{\epsilon_s}{d - \bar{y}} = \frac{10.8 \times 10^{-4}}{430 - 141} = 3.73 \times 10^{-6} \quad \text{1/mm}$$

مسئله اول- مقطع شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت اثر لنگر خمشی مثبت قرار می گیرد. نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد کششی، $n = \frac{E_s}{E_c}$ و برای فولاد فشاری با توجه به اثرات خزش، $2n$ می باشد. با در نظر گرفتن $f'_c = 28 \text{ MPa}$ و هم چنین $f_y = 420 \text{ MPa}$ مطلوب است محاسبه:



۱. لنگر ترک دهنده مقطع

۲. حداکثر ظرفیت خمشی، M_{max} در ناحیه الاستوپلاستیک

۳. حداکثر تنش فشاری بتن و تنش کششی فولاد تحت M_{max}

۴. ترسیم نمودار تغییرات تنش و کرنش تحت M_{max}

$$f'_c = 28 \text{ MPa} \quad A_s = 4\Phi 36 \quad d = 700 \text{ mm} \quad b = 400 \text{ mm}$$

$$f_y = 420 \text{ MPa} \quad A'_s = 2\Phi 22 \quad d' = 70 \text{ mm} \quad h = 770 \text{ mm}$$

$$E_s = 200 \times 10^3 \text{ MPa}, \quad E_c = 2450^{1.5} (0.043) \sqrt{f'_c} \quad w_c = 2450$$

$$E_c = 2450^{1.5} \times 0.043 \sqrt{28} = 27590 \text{ MPa} = 27.6 \times 10^3 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200 \times 10^3}{27.6 \times 10^3} \Rightarrow n = 7.25$$

$$n-1 = 6.25; \quad 2n-1 = 13.5; \quad 2n = 14.5$$

$$A_s = 4 \times \frac{\pi}{4} \times 36^2 = 4072 \text{ mm}^2 \quad (n-1)A_s = 25450 \text{ mm}^2$$

$$A'_s = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 22^2 = 760 \text{ mm}^2 \quad (2n-1)A'_s = 10260 \text{ mm}^2$$

$$A_g = 400 \times 770 = 308000 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{A_g(h/2) + (n-1)A_s d + (2n-1)A'_s d'}{A_g + (n-1)A_s + (2n-1)A'_s} \Rightarrow \bar{y} = \frac{308 \times 10^3 (770/2) + 25450 \times 700 + 10260 \times 70}{308000 + 25450 + 10260}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 399 \text{ mm} > h/2 = 385$$

به خاطر این که مرکز جرمی آرسنیک به زیر $\frac{h}{2}$ می باشد.

$$I_{tr} = \sum \bar{I} + A d y^2 = \frac{400 \times 770^3}{12} + 308000 \left(399 - \frac{770}{2}\right)^2 + 25450 (399 - 700)^2 + 10260 (399 - 70)^2$$

$$I_{tr} = 18.70 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_g = \frac{400 \times 770^3}{12} = 15.2 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{tr} / I_g = 1.23$$

معادله تبدیل به خاطر این فوراً 23٪ اثر آرسنیک دارد.

$$f_r = 0.7 \sqrt{f'_c} = 3.7 \text{ MPa}$$

$$M_{cr} = f_r \frac{I_{tr}}{h - \bar{y}} = 3.70 \times \frac{18.7 \times 10^9}{(770 - 399)} = \Delta M_{cr} = 187 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 187 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3 نفر

طرح در ناصب الاستوتیلاریک :

$$\bar{y} = \frac{(b\bar{y})(\bar{y}/2) + nA_s d + (2n-1)A'_s d'}{b\bar{y} + nA_s + (2n-1)A'_s}$$

$$\bar{y} = \frac{400 \bar{y}^2/2 + 29522 \times 700 + 10260 \times 70}{400 \bar{y} + 29522 + 10260}$$

$$\Rightarrow 400 \bar{y}^2 + (29522 + 10260) \bar{y} = 200 \bar{y}^2 + 29522 \times 700 + 10260 \times 70$$

$$\Rightarrow 200 \bar{y}^2 + 1.175 \times 10^6 \bar{y} - 21.4 \times 10^6 = 0 \Rightarrow \bar{y} = 242 \text{ mm}$$

$$I_{cr} = \sum \bar{I} + A d_y^2 = \frac{400 \times 242^3}{12} + 400 \times 242 \left(\frac{242 - 242}{2} \right)^2 + 29522 (700 - 242)^2 + 10260 (70 - 242)^2$$

$$I_{cr} = 8.39 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{cr} / I_g = \frac{8.39 \times 10^9}{15.2 \times 10^9} = 55\% \quad \text{نسبت ممان انرسی مقطع ترک خورده}$$

$$f_{c,max} = \frac{M \bar{y}}{I_{cr}} = 0.5 f'_c \Rightarrow M = 0.5 f'_c \frac{I_{cr}}{\bar{y}}$$

$$M = 0.5 \times 28 \times \frac{8.39 \times 10^9}{242} = 485 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} = 485 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

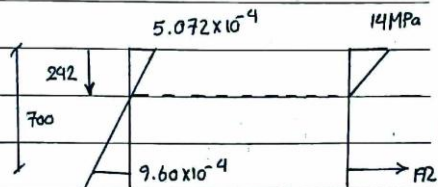
$$f_s = n \frac{M d - \bar{y}}{I_{cr}} = f_y \Rightarrow M = \frac{420}{7.25} \times \frac{8.39 \times 10^9}{700 - 242} = 1061 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} = 1061 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M = \min \{ 485, 1061 \} = 485 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{(3 نفره)}$$

$$f_{c,max} = 0.50 f'_c = 28 \text{ MPa} ; f_s = \frac{485 \times 10^6 \times 7.25 \times (700 - 242)}{839 \times 10^9} = 192 \text{ MPa}$$

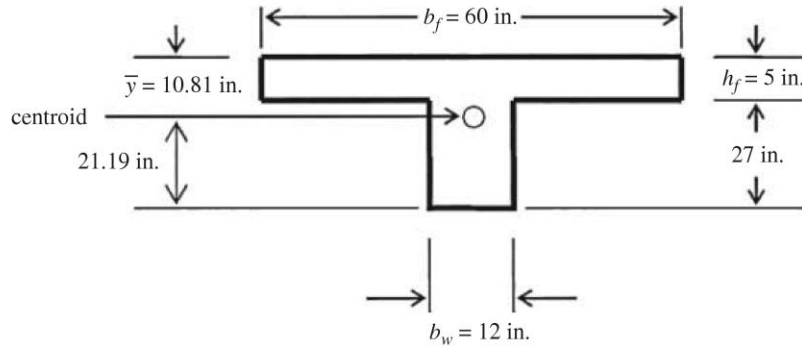
$$\epsilon_c = \frac{f_{c,max}}{E_c} = \frac{14}{27.6 \times 10^3} = 5.072 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_s = \frac{f_s}{E_s} = \frac{192}{200 \times 10^3} = 9.60 \times 10^{-4}$$



Example 2.2

- (a) If the T-beam shown is uncracked, calculate the stress in the concrete at the top and bottom extreme fibers under a positive bending moment of 80 ft-k.
- (b) If $f'_c = 3000$ psi and normal-weight concrete is used, what is the maximum uniformly distributed load the beam can carry if it is used as a simple beam with 24-ft span without exceeding the modulus of rupture of the concrete?
- (c) Repeat part (b) if the beam is inverted.



SOLUTION

- (a) Locate the neutral axis with respect to the top of the section:

$$\bar{y} = \frac{b_f h_f \left(\frac{h_f}{2}\right) + (b_w)(h - h_f) \left(h_f - \frac{h - h_f}{2}\right)}{b_f h_f + (b_w)(h - h_f)}$$

$$= \frac{(60 \text{ in.})(5 \text{ in.})(2.5 \text{ in.}) + (12 \text{ in.})(27 \text{ in.}) \left(5 \text{ in.} + \frac{27 \text{ in.}}{2}\right)}{(60 \text{ in.})(5 \text{ in.}) + (12 \text{ in.})(27 \text{ in.})} = 10.81 \text{ in.}$$

The moment of inertia is:

$$I_g = \frac{b_f h_f^3}{12} + b_f h_f \left[\left(\bar{y} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + \frac{b_w (h - h_f)^3}{12} + b_w (h - h_f) \right] \left[\bar{y} - h_f - \frac{(h - h_f)}{2} \right]^2$$

$$= \frac{(60 \text{ in.})(5 \text{ in.})^3}{12} + (60 \text{ in.})(5 \text{ in.}) \left(10.81 \text{ in.} - \frac{5 \text{ in.}}{2}\right)^2 + \frac{(12 \text{ in.})(32 \text{ in.} - 5 \text{ in.})^3}{12}$$

$$+ (12 \text{ in.})(32 \text{ in.} - 5 \text{ in.}) \left(10.81 \text{ in.} - 5 \text{ in.} - \frac{27 \text{ in.}}{2}\right)^2$$

$$= 60,185 \text{ in.}^4$$

The stress in the bottom fiber under the given moment of 80 ft-k is:

$$f_{\text{top}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(80 \text{ ft-k})(12 \text{ in./ft})(32 \text{ in.} - 10.81 \text{ in.})}{60,185 \text{ in.}^4} = 0.338 \text{ k/in.}^2 = 338 \text{ lb/in.}^2$$

The stress in the top fiber is:

$$f_{\text{top}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(80 \text{ ft-k})(12 \text{ in./ft})(10.81 \text{ in.})}{60,185 \text{ in.}^4} = 0.172 \text{ k/in.}^2 = 172 \text{ lb/in.}^2$$

(b) The modulus of rupture, f_r , of normal-weight concrete with $f'_c = 3000$ psi is:

$$f_r = 7.5\lambda\sqrt{f'_c} = 7.5(1.0)\sqrt{3000} = 411 \text{ lb/in.}^2$$

The moment that causes a stress equal to the modulus of rupture is:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{c} = \frac{(411 \text{ lb/in.}^2)(60,185 \text{ in.}^4)}{(32 \text{ in.} - 10.81 \text{ in.})} = 1167.344 \text{ in-lb} = 97.28 \text{ ft-k}$$

The uniformly distributed load on a simple span that causes this much moment is:

$$w = \frac{8M}{l^2} = \frac{8(97.28 \text{ ft-k})}{(24 \text{ ft})^2} = 1.351 \text{ k/ft} = 1351 \text{ lb/ft}$$

(c) If the beam is inverted, then the c term used to calculate M_{cr} is 10.81 in. instead of 21.19 in., hence:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{c} = \frac{(411 \text{ lb/in.}^2)(60,185 \text{ in.}^4)}{(10.81 \text{ in.})} = 2,288,255 \text{ in-lb} = 190.69 \text{ ft-k}$$

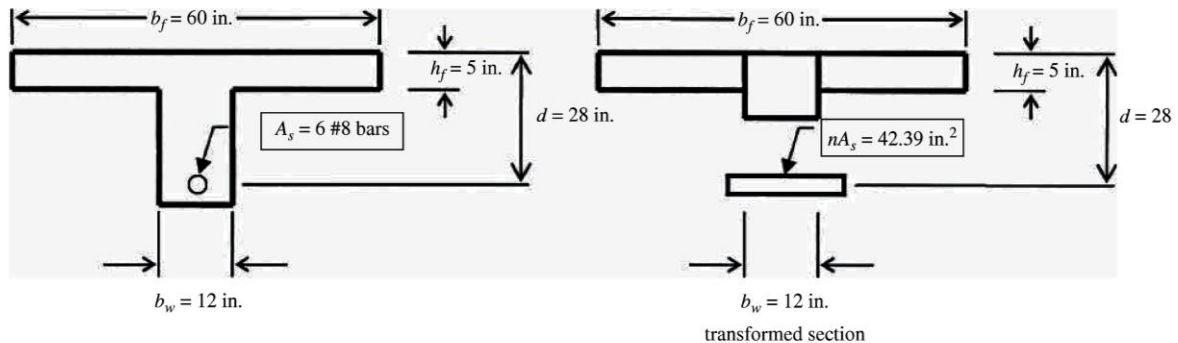
The uniformly distributed load on a simple span that causes this much moment is:

$$w = \frac{8M}{l^2} = \frac{8(190.69 \text{ ft-k})}{(24 \text{ ft})^2} = 2.648 \text{ k/ft} = 2648 \text{ lb/ft}$$

This is almost double the load that the beam can carry if oriented the opposite way. Don't get the impression that this is the best orientation for a T beam, however. In the next section, when we examine reinforced sections, the opposite will be true.

Example 2.6

Calculate the bending stresses in the concrete and the reinforcing steel, using the transformed area method: $f'_c = 3000$ psi, normal-weight concrete, $n = 9$, $M = 250$ ft-k.



SOLUTION

Assume the neutral axis is in the web, and take moments about the neutral axis of the transformed section for this example:

$$(b_f - b_w)h_f \left(x - \frac{h_f}{2} \right) + \frac{b_w x^2}{2} = nA_s(d - x)$$

$$(60 \text{ in.} - 12 \text{ in.})(5 \text{ in.}) \left(x - \frac{5 \text{ in.}}{2} \right) + \frac{(12 \text{ in.})(x)^2}{2} = (9)(4.71 \text{ in.}^2)(28 \text{ in.} - x)$$

Using a calculator with a solver for quadratic equations results in $x = 5.65$ in. Since this value of x exceeds h_f of 5 in., the assumption that the neutral axis is in the web is valid. If x had been smaller than 5 in., then the value we obtained would not have been valid, and the preceding equations would have to be rewritten and solved assuming $x < h_f$.

$$I_{cr} = \frac{(b_f - b_w)h_f^3}{12} + (b_f - b_w)h_f \left(x - \frac{h_f}{2} \right)^2 + \frac{b_w x^3}{12} + b_w x \left(\frac{x}{2} \right) + nA_s(d - x)^2$$

$$= \frac{(60 \text{ in.} - 12 \text{ in.})(5 \text{ in.})^3}{12} + (60 \text{ in.} - 12 \text{ in.})(5 \text{ in.}) \left(5.65 \text{ in.} - \frac{5 \text{ in.}}{2} \right)^2$$

$$+ \frac{(12 \text{ in.})(5.65 \text{ in.})^3}{3} + (9)(4.71 \text{ in.}^2)(28 \text{ in.} - 5.65 \text{ in.})$$

$$= 24,778 \text{ in.}^4$$

The T-shaped part of the transformed section could be divided into rectangles in other ways besides the one shown. The resulting answer would still be the same.

The stress in the concrete can now be calculated:

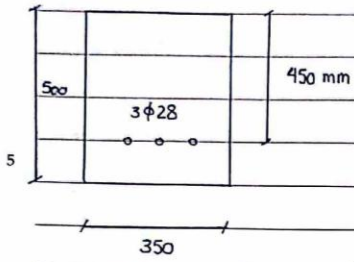
$$f_c = \frac{Mx}{I_{cr}} = \frac{(250 \text{ ft-k})(5.65 \text{ in.})(12 \text{ in./ft})}{24,778 \text{ in.}^4} = 0.684 \text{ k/in.}^2 = 684 \text{ lb/in.}^2$$

This concrete stress is well below the allowable values that were once in the ACI Code. They used to be $0.45f'_c = (0.45)(3000 \text{ lb/in.}^2) = 1350 \text{ lb/in.}^2$.

The stress in the reinforcing steel can now be calculated:

$$f_s = \frac{nM(d - x)}{I_{cr}} = \frac{(9)(250 \text{ ft-k})(28 \text{ in.} - 5.65 \text{ in.})(12 \text{ in./ft})}{24,778 \text{ in.}^4} = 24.354 \text{ k/in.}^2 = 24,354 \text{ lb/in.}^2$$

تمرینات محاسبه محسوس: ترک خوردگی در ناحیه الاستوپلاستیک
 توجه: در صورت نیاز به هر داده آزما به صورت منطقی فرض کنید.

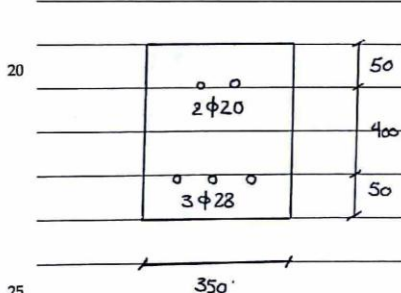


مسئله اول - گسترش ترک خوردگی در مقطع مقابل را بررسی کنید.
 با فرض اینکه مقطع تحت گسترش ترک خوردگی قرار گیرد. حدالته
 تنش فشاری بتن و تنش کششی فولاد را بررسی کنید.
 فرض کنید $f_c' = 28 \text{ MPa}$ و $f_y = 400 \text{ MPa}$ باشد.

مسئله دوم - در مرحله قبل بیشترین گسترش فشاری در بتن و گسترش کششی را حساب کنید.
 توزیع تنش و گسترش در ارتفاع مقطع را ترسیم کنید و آنجا که مقطع را بررسی کنید.

مسئله سوم - مقطع نشان داده شده در شکل اول را در نظر بگیرید. حدالته گسترش قابل تحمل محل در ناحیه الاستوپلاستیک را حساب کنید.
 با فرض اینکه تنش فشاری بتن به $0.5 f_c'$ و تنش کششی فولاد به f_y

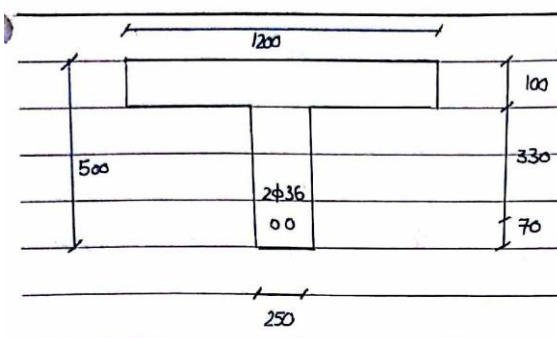
رسود شود. ضرایب مقطع مورد نظر تحت حدالته گسترش قابل تحمل خود قرار گیرد. توزیع تنش و گسترش در ارتفاع مقطع را ترسیم کنید و آنجا که مقطع را بررسی کنید.



مسئله چهارم - مقطع شکل مقابل را در نظر بگیرید.
 با فرض $f_c' = 28 \text{ MPa}$ و $f_y = 400 \text{ MPa}$ لطوب است.

حساب گسترش در حالت ترک خوردگی
 حساب حدالته گسترش قابل تحمل در ناحیه الاستوپلاستیک

توجه: با در نظر گرفتن اثرات خزش در ناحیه فشاری از نسبت مدول الاستیسیته (200) برای کاسه همان انیترنی استفاده شود. (سوال حل شده ۳-۴ از کتاب دکتر صفوی تراب و بیستون)



فصل پنجم
 با فرض $f_y = 350 \text{ MPa}$ و $f'_c = 28 \text{ MPa}$

رابطه است محاسبه:

کنترل ترک خوردگی مقطع

جدول کنتر قابل تحمل در ناحیه الاستوپلاستیک

محاسبه ضرایب تنش کششی بتن و تنش کششی فولاد در ناحیه الاستوپلاستیک

رسم توزیع تنش و کرنش در ناحیه الاستوپلاستیک